

MODELAJE GEOMÉTRICO DE ESTRUCTURA ÓSEA

Ruiz Salguero O. (Profesor Asistente), Henao C. (Estudiante)

Area: CAD / CAM y Geometría Computacional.

Dpto: Centro Interdisciplinario de Investigación (CII) en CAD / CAM / CG

Universidad EAFIT

A.A. 3300 Medellín, COLOMBIA. Tel. +57(4)266-0500, fax 266-4284 E-mail: oruiz@sigma.eafit.edu.co

RESUMEN

En CAD/CAGC/CG la organización topológica de datos de formas geométricas presenta dificultades: (i) las características matemáticas de la superficie dependen de la consideraciones no geométricas, (ii) los datos presentan una aleatoriedad por efectos del muestreo, y, (iii) una digitalización xyz incluye en general varias direcciones e intervalos de muestreo. En consecuencia, esta investigación presenta herramientas (portables a diferentes servidores CAD) para la organización topológica de datos de digitalizaciones y un caso de recuperación de formas óseas. En los dos casos los resultados obtenidos rompen la combinación cerrada hardware - software propietarios tradicionales, con la consecuente reducción en costos de tecnología.

0 INTRODUCCIÓN

El diseño geométrico asistido por computador (CAGD) aplicado al tratamiento de series masivas de datos puntuales tiene aplicaciones en CAD, CAM, Meteorología, Medicina, Geología, etc. Para aplicar técnicas computarizadas las etapas básicas son (a) captura de datos, (b) procesamiento y obtención de modelos, y, (c) utilización del modelo. Este artículo versa principalmente sobre (a) y (b). La Fig.1 muestra una taxonomía (no completa) de estas etapas.

(a) La captura de datos aplica medios ópticos, magnéticos, de ultrasonido, de absorción, etc., además de las tradicionales técnicas de muestreo por contacto. Técnicas de muestreo remoto incluyen MRI (Magnetic Resonance Imaging), LSCM (Láser Scan Confocal Microscopy), CAT (Computerized Axial Tomography), 3D-SI (Seismic Imaging), 3D-US (Ultrasound), etc. En general, los métodos de captura mencionados producen grandes volúmenes de datos que carecen de organización topológica o de vecindario. Por esta razón, son prácticamente inútiles a ese nivel, excepto para aplicaciones de visualización o cálculo elementales.

(b) Las series masivas de datos deben ser aproximadas por estructuras de datos y / o fórmulas que las organicen y representen en forma compacta. Este proceso se denomina modelaje (sólido, superficial o de líneas), y se requiere para los procesos subsecuentes de edición, análisis, visualización o manufactura. Para propósitos de modelaje superficial (objeto de esta investigación) varios problemas se presentan: (i) dado un conjunto de datos en bruto su discriminación en subconjuntos (orgánicos o funcionales) es requerida. (ii) una vez obtenidos estos subconjuntos se requiere definir la forma matemática de las superficies que los representen. (iii) dada una forma matemática decidida (por ejemplo una superficie paramétrica), la organización topológica de los puntos de control debe ser determinada, y (iv) las condiciones de frontera (continuidad) deben ser selectivamente forzados o eliminados, de acuerdo a las características funcionales del vecindario local. En consecuencia, el ajuste automático de superficies es aun un problema abierto, que se ha atacado escribiendo programas específicamente orientados a una familia particular de objetos, y encadenando hardware y software propietarios en un solo paquete. Esta solución, común tanto en CAD / CAM como en aplicaciones medicas sube el precio de la tecnología dado que el hardware produce formatos de datos, o introduce información codificada, los cuales no son accesibles a programas independientes.

Esta investigación: (i) ilustra un procedimiento para convertir la información *raster* de un CAT (Computerized Axial Tomography) en digitalizaciones vectorizadas. (ii) recapitula de [10] y [17] una serie de herramientas de razonamiento geométrico para procesar datos de digitalizaciones y ajustar superficies paramétricas a ellos. Se muestra un caso de estudio exitoso (digitalización láser de la industria del calzado) de objetos para los cuales las suposiciones de [10] y [17] son ciertas. En contraste, también se presenta un caso (CAT del área medica - odontológica), para el cual ellas no se cumplen. Dicho caso se trata de una

Captura	Muestreo Directo	Digitalización de Contacto
	Muestreo Remoto	-Digitalización Laser -Resonancia Magnética -Ultrasonido -Microscopía Confocal Laser -Fotografía y Restitución
Procesamiento	1. Recuperación de Datos 2. Ordenamiento 3. Modelaje Sólido / Superficial	
Aplicaciones	Propiedades Místicas (Voxels, Octrees, B-Rep) Manufactura de Superficies (B-Rep, Surface Model) Análisis de Elementos Finitos (Voxels, Octrees, B-Rep, Surface Model) Despliegue Realista (B-Rep, Surface Model) Inspección Industrial (Voxels, Octrees) Sistemas Geográficos (Line Models)	

Fig. 1: Taxonomía de procedimientos de captura, procesamiento y aplicaciones para datos puntuales.

forma alternativa con acciones del usuario para reemplazar los módulos inaplicables. Se hace énfasis en que, en ambos casos, se rompe la interdependencia hardware - software que se registra en muchos casos de tecnología CAD / CAM y / o biomédica, incrementando sus costos.

Las herramientas de software se implementaron para ser AIS - compatibles (Application Interface Specification, [14], [10], [18]). AIS describe los servicios de un modelador geométrico genérico en forma funcional. Por lo tanto el código AIS - compatible desarrollado puede ejecutarse transparentemente sobre AutoCAD y MicroStation (y cualquier modelador para el cual la interface AIS esté implementada).

En este artículo la sección 1 examina la literatura existente, la sección 2 discute las herramientas desarrolladas y un caso de aplicación directa, la sección 3 ilustra un caso con objetos no tratables y muestra los pasos a tomar para obviar las suposiciones que no se cumplen. La sección 4 concluye el artículo.

1 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

1.1 Captura de Datos Digitales.

En MRI, LSCM, CAT, 3D-SI, 3D-US, etc., la unidad básica de información es un pixel volumétrico (voxel), cuyo tamaño depende de la resolución del dispositivo, y cuyos atributos dependen de propiedades del cuerpo en ese vecindario (luminosidad, densidad, etc.). En CAT un haz de rayos x incide sobre el objetivo. La cantidad de radiación absorbida y transmitida por él dependen de su densidad, y por lo tanto las diferentes partes del cuerpo son distinguibles ([VAN.92][12]). Un corolario de dicho principio es que las fronteras de cambios de densidad se reflejan en los atributos de los voxels registrados, y por lo tanto se puede hacer una estimación y despliegue (en medicina) del límite entre un órgano y otro [3]. En CAD / CAM se aplica el método de digitalización láser que, siendo remoto, no entrega información de voxels sino directamente de trayectorias de muestreo con puntos (x,y,z). Dicho método, sin embargo presenta limitación en cuanto a acceso a espacios recónditos e inestabilidad en las coordenadas determinadas. Como se menciona arriba, el problema de producción de datos precisos ha dado paso a la clasificación, reducción (por ejemplo en octrees [13]) y representación compacta de ellos, dado los grandes volúmenes administrados, y la baja cantidad de información del voxel elemental.

1.2 Ajuste de Modelos Sólidos, Superficiales y de Líneas

El ajuste de superficies ha sido atacado desde dos puntos de vista: (i) matemático y (ii) algorítmico. Las fórmulas matemáticas se ajustan a los datos por medio de identificación de parámetros. Si el orden de los datos no es relevante se pueden usar interpolaciones o procedimientos estadísticos. Las interpolaciones

(polinomiales) tienen la desventaja de presentar oscilaciones indeseables y costo computacional creciente en cuanto el número de puntos crece. Las técnicas estadísticas hallan las ecuaciones que se consideran más verosímiles para representar el conjunto de puntos muestreado. Ellas se usan en comprobación de tolerancias, en la cual las hipótesis de planaridad, cilíndricidad, etc., se evalúan comparando las coordenadas del rasgo geométrico verosímil con los del rasgo geométrico real, o por medio de los coeficientes de correlación estadísticos ([1], [2]).

Las aproximaciones matemáticas dependientes del orden del conjunto de puntos usan superficies paramétricas atraídas por un poliedro de control, representativo del conjunto inicial. ([6], [9]). La escogencia del poliedro de control es obviamente crucial por varias razones: debe ser reducido (mesh reduction, [8]), representar el conjunto de puntos, forzar continuidad selectivamente en las fronteras, no generar vértices patológicos, etc.

La aproximación algorítmica enfoca la clasificación y partición del conjunto de datos, y la escogencia del poliedro de control. Es muy importante dado que es pre-requisito para aplicar métodos matemáticos. Entre los algoritmos más efectivos, Alpha Shapes ([4], [5]) ayudan a reconstruir superficies y volúmenes para un conjunto de puntos dados, de acuerdo al valor de un parámetro *alpha*. Sin embargo, puesto que ellas solo garantizan continuidad C^0 , algunos investigadores ([7]) las usan como un paso intermedio para recuperar la información topológica. Esta investigación recupera dicha información directamente, por medio de razonamiento geométrico, resuelve los problemas de separación de poliedros de control, continuidad C^1 y C^2 , etc. ([11], [10], [RUIZ.97]), y por último ajusta al conjunto de datos tan pocas superficies B-spline como sea posible. Por lo tanto, es una aplicación híbrida de técnicas algorítmicas y matemáticas. El razonamiento geométrico de soporte se implementa sobre servidores comerciales de modelamiento 3D como se reporta en ([15], [16]).

1.3 Aplicaciones

La Fig.1 toca tangencialmente los diferentes modelos apropiados para algunas aplicaciones: las enumeraciones exhaustivas (Voxels, Octrees) son apropiadas para el cálculo de propiedades mágicas. Con algoritmos más complejos, algunos modelos B-rep también pueden responder a dichas demandas. Cualquier aplicación que presuponga inspección visual aproximada o cualitativa puede ser servida por la estructura de voxel u octree. Sin embargo, si la estructura precisa de las superficies es requerida, los modelos sólidos o superficiales (B-Rep) son más apropiados. En muchas aplicaciones geológicas, mineras, GIS o sísmicas básicas el modelo de línea es adecuado. En general, la información de voxel debe ser vectorizada y sintetizada en otra forma, dado su gran consumo de espacio.

2. HERRAMIENTAS DE RAZONAMIENTO GEOMETRICO

Las herramientas descritas son ilustradas con su aplicación al tratamiento de una digitalización láser de hormas de calzado (Fig.1). El alto volumen de datos manejado (33000 puntos) requiere herramientas de reducción de datos discutidas adelante. La siguiente sección discutirá una aplicación a digitalización de una mandíbula humana de un paciente vivo, derivada de una Tomografía Axial Computarizada (CAT).

2.1 Clasificación Punto - Superficie

Dado que muchas digitalizaciones se realizan en trayectorias predefinidas, por ejemplo bloqueando un eje del digitalizador, o haciendo *scanning* por tajadas, los puntos quedan confinados en planos paralelos entre sí. (Fig.2). La función *planar classification* toma un conjunto sin estructura S de puntos en E^3 ($\{point\}$ donde $\{ \}$ representa un conjunto no estructurado de elementos, $[\]$ corresponde a una lista ordenada y $\{ \{ \}$ denota un conjunto de conjuntos) y una familia de N planos de digitalización (Fig.1), definida por el vector (\hat{u}) normal a los planos. La función retorna la partición Π del conjunto inicial, formada por los subconjuntos Π_i de S :

$$\Pi = \{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_N\}, \quad \emptyset = \Pi_j \cap \Pi_k \text{ para } j \neq k, \quad \text{y} \quad S = \bigcup_{j=1}^{j=N} \Pi_j \quad (\text{Ec.1})$$

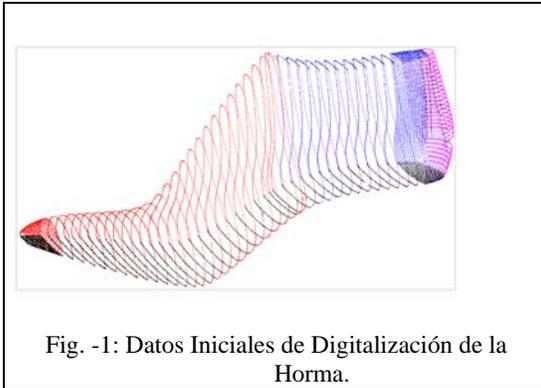


Fig. -1: Datos Iniciales de Digitalización de la Horma.

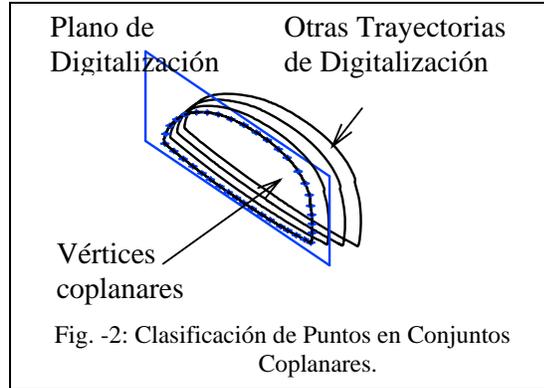


Fig. -2: Clasificación de Puntos en Conjuntos Coplanares.

así, el tipo de la partición es $\{\{point\}\}$. Cada conjunto Π_i está formado por los puntos contenidos (con un margen ϵ) en el $i^{ésimo}$ plano de digitalización, con cada plano determinado por su punto pivote ([1], [2]).

2.2 Recuperación de Polígono. Ordenamiento Angular Alrededor de Kernel

De un conjunto de puntos (coplanares) Q , aleatoriamente capturados sobre una sección de corte de un objeto, se requiere recobrar la lista ordenada P (f point J) que representa esa sección de corte. Así planteado este problema no tiene solución. Sin embargo, si la sección de corte P del objeto tiene las propiedades mencionadas abajo ([11], [10], [17]), el problema se torna soluble.

Definiciones: Dado una lista de puntos coplanares ordenados $P=[p_0, p_1, p_2, \dots, p_n]$, su kernel (Fig.3), $Ker(P)$, es el lugar geométrico de los puntos a dentro de P tales que para todo punto b en la frontera de P , el segmento ab esta adentro de P (osea, todos los puntos a desde los cuales la frontera de P es visible). Así, para todo polígono P , $Ker(P)$ es convexo y $Ker(P) \subseteq P$. Si P es convexo, $Ker(P) = P$. Si $Ker(P)$ no es vacío, cualquier punto q dentro de $Ker(P)$ puede ser usado (junto con \hat{u} , la normal al plano) como origen polar para ordenar angularmente Q . La secuencia así obtenida es P . (con un vértice de partida posiblemente diferente).

De acuerdo a lo anterior, una aproximación heurística puede ser usada para recuperar un polígono P de una enumeración aleatoria Q de sus vértices, si dos hipótesis se cumplen: (i) la sección de corte del objeto digitalizado tiene kernel no vacío, y, (ii) el centro de gravedad de P (o Q), $cg(Q)=cg(P)$ está dentro de $Ker(P)$. Como se muestra (Fig.3 y Fig.4), en tales casos el ordenamiento angular alrededor de $cg(Q)$ hace posible la recuperación de P . En muchas aplicaciones de ingeniería los objetos tienen secciones P las cuales son convexas, o tienen kernel no nulo, $Ker(P)$. Si $cg(P)$ no está dentro de $Ker(P)$, el diseñador debe escoger un punto de $Ker(P)$ manualmente. El tratamiento de casos con kernel vacío se deja para la siguiente sección.

2.3 Detección de Esquinas

La detección de esquinas abruptas en un polígono P se requiere para evitar forzar allí condiciones de continuidad C^1 o C^2 inexistentes. Dado que una digitalización es un proceso discreto, cada vértice en P es, en sentido estricto, una esquina abrupta, puesto que allí la continuidad C^1 se pierde. La Fig.5 muestra el reconocimiento de esquinas para diferentes regiones de la horma. Se encontró que la detección trabaja en forma eficiente en las regiones delantera y trasera de la horma, donde realmente existen esquinas en el sentido geométrico de la palabra. En la parte central (arco del pié) el algoritmo es incapaz de identificar las esquinas bruscas, dado que ellas no existen en el sentido geométrico, sino que son puntos subjetivos definidos por el zapatero. La Fig.6 muestra que la detección de esquinas fué usada para remover la suela, y evitar forzar continuidades no existentes en su unión con la parte superior del zapato.

2.4 Re-captura o Re-muestreo

La re-captura es usada para generar digitalizaciones artificiales con parámetros de muestreo diferentes de los de la digitalización física original.. Los diferentes tipos implementados son: (a) **Re-muestreo por distancia:** Dado un polígono P en E^3 , y una distancia d , se retorna el polígono P' resultante de re-muestrear la frontera de P con segmentos de longitud d . (b) **Re-muestreo por número de puntos:** Dado un polígono P en E^3 , y un entero N , se retorna el polígono P' , formado por los vértices de P muestreados cada N puntos.

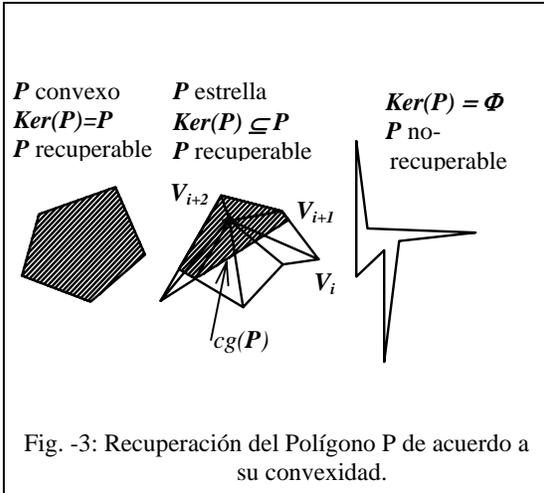


Fig. -3: Recuperación del Polígono P de acuerdo a su convexidad.

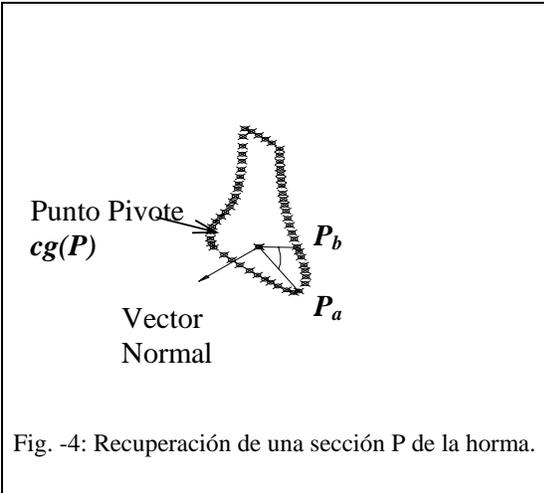


Fig. -4: Recuperación de una sección P de la horma.

(c) **Re-muestreo por intersección con entidades:** Dado un polígono P en E^3 , y una lista de entidades $L=[e_0, e_1, \dots, e_m]$, se retorna el polígono P' , formado por las intersecciones de P contra las entidades e_0, e_1, \dots etc. En el presente, esta operación es implementada con L como una lista de planos con vector normal común y diferentes puntos pivote. En el ejemplo presentado se aplicaron los re-muestreos por numero de puntos (reduciendo el numero de puntos de 33.000 a 2.500) y por intersección con entidades. Este último fué necesario debido a que la digitalización original había sido hecha en dos direcciones diferentes (Fig.1), y se requería una digitalización virtual en una sola dirección abarcando toda la parte superior de la horma (Fig.6).

2.5 Filtrado

El filtrado es el proceso por el cual una función $f()$ se aplica a una sub-secuencia $S=[p_b, p_{i+b}, p_{i+2b}, \dots, p_{i+wb-1}]$ de W vértices de un polígono P , retornando vértices q_i para formar otra sub-secuencia $S'=[q_m, q_{m+b}, q_{m+2b}, \dots, q_h]$. Los puntos de S' no están necesariamente en S , y S' puede tener menos puntos que S dependiendo del manejo sobre la ventana W . Las función de filtro usada en esta investigación fué:

$$\vec{q}_i = f(\vec{p}_i, \dots, \vec{p}_{i+w-1}) = \sum_{j=1}^{j=W} \alpha_j \cdot \vec{p}_{j+i-1} \text{ con } \sum_{j=1}^{j=W} \alpha_j = 1.0, \alpha_j \geq 0, j=1..W \quad (\text{Ec.2})$$

con $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_N = 1/W$ para un promedio, y $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \dots \alpha_W = 0$ para re-muestreo.

2.6 Ajuste de la Superficie

Las herramientas descritas construyeron 51 polilíneas planares con 50 puntos cada una. Una superficie paramétrica B-spline con $N_u \times M_v = 51 \times 50$ puntos de control fué ajustada a ellos, con orden 3 in dirección u (N_u) y orden 4 en dirección v (M_v), vectores de nudos estándar en ambas direcciones ([MOR.85]). La Fig.6 muestra la superficie B-spline obtenida. Las pequeñas imperfecciones en el borde de la superficie se deben a saltos en el proceso de la digitalización láser.

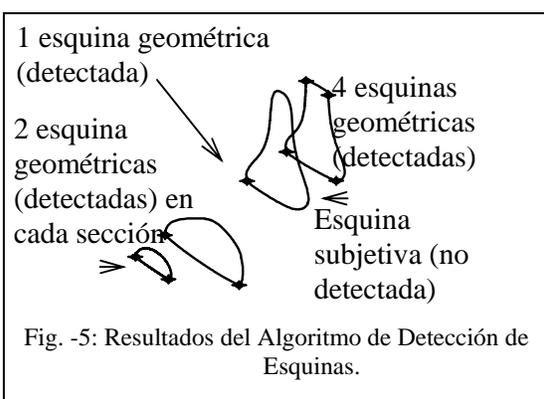


Fig. -5: Resultados del Algoritmo de Detección de Esquinas.

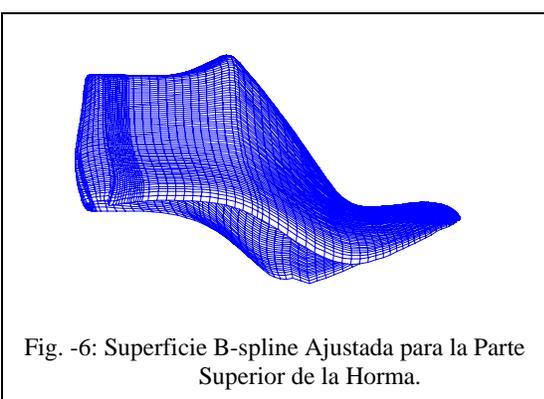


Fig. -6: Superficie B-spline Ajustada para la Parte Superior de la Horma.

3 CASO DE ESTUDIO. REPRESENTACIÓN ÓSEA DE MANDIBULA

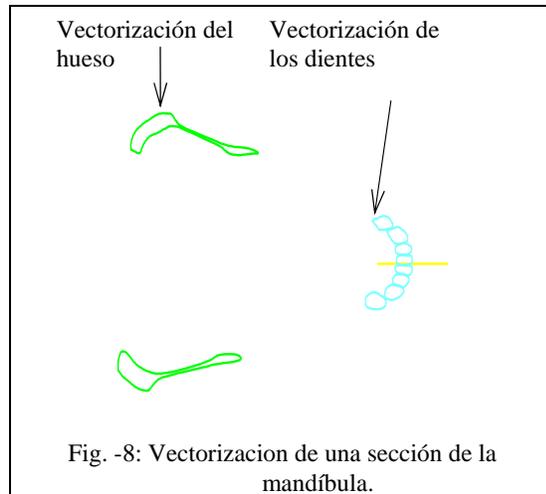
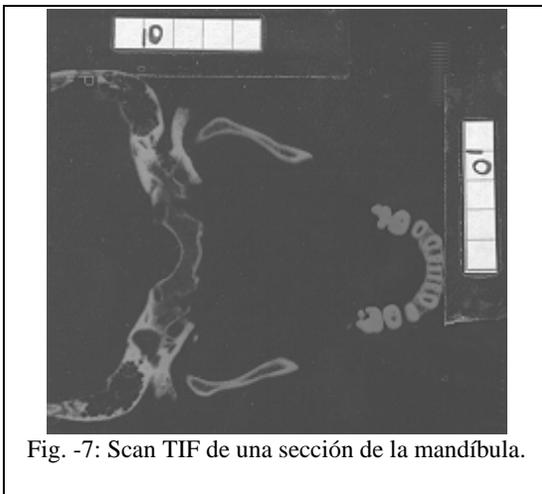
El presente caso de estudio toma como entrada las radiografías (hard copies) de una Tomografía Axial; Computarizada (CAT) de la mandíbula inferior de un sujeto. Su objetivo es producir una representación superficial (en facetas) de la mandíbula, para su ulterior análisis por elementos finitos. Como se ha acentuado anteriormente, el acceso a la información digital fué imposible, dado el formato propietario en que está registrada, y que solo es interpretado por el software del fabricante del tomógrafo. Esta circunstancia es una constante en la mayoría de trabajos con digitalizaciones, sean industriales, geográficas o medicas. Romper esa interdependencia constituye una de las motivaciones principales de esta investigación. Por lo tanto, se requirió el paso inicial de convertir la información de las radiografías en información digital de algún tipo.

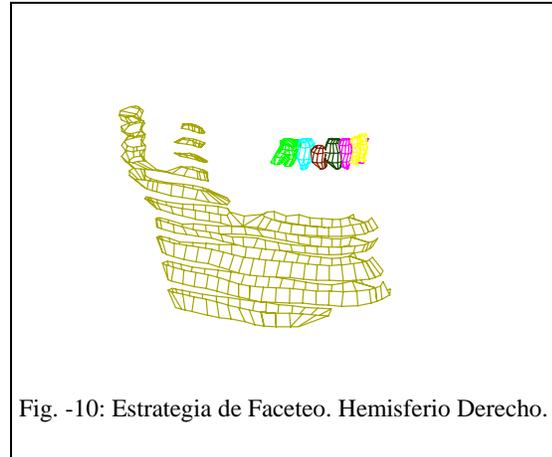
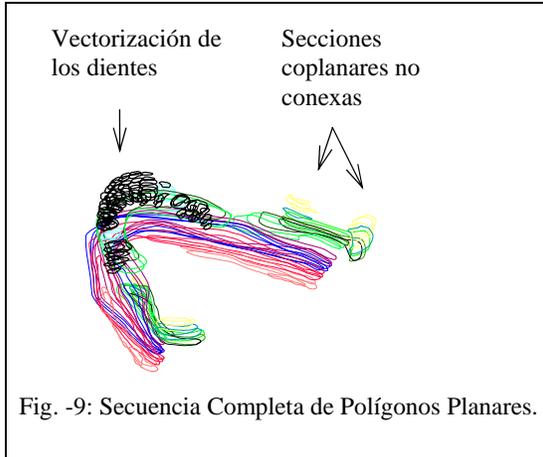
3.1 Traducción a Formato Digital

El paciente fue sometido a un procedimiento CAT sobre un área de exploración de longitud 6.3 cms de la mandíbula inferior y con cortes axiales (perpendiculares a la columna vertebral) con intervalos de 1 mm. Las radiografías fueron pasadas por *scanners*, luego de hacer marcas especiales para registrar los sistemas coordenados (Xi,Yi) locales a cada recuadro. Dichos sistemas permiten el posterior ensamblaje de la información de los cortes individuales bajo un sistema coordenado común. La Fig.7 muestra algunos resultados *raster* (TIF) del proceso de *scan*. Obsérvese que coexisten regiones óseas con cortes de dientes y molares. Esta diferencia es significativa para el estudio odontológico y por lo tanto se deben ajustar a hueso y dentadura modelos superficiales separados. El hecho de que en las secciones aparezcan corte de hueso inconexos dificulta no solo la recuperación de las secciones sino el tendido de superficies sobre la nube de puntos.

3.2 Vectorización

La Fig.8 muestra la vectorización de una sección aproximadamente igual a la mostrada en la Fig.7. Las vectorizaciones pueden, en algunos casos ser realizadas automáticamente. En este caso, sin embargo, dado el bajo contraste en áreas importantes de la imagen *raster*, se hizo necesaria la intervención de un usuario. La Fig.8 muestra simultáneamente las vectorizaciones de hueso y dientes. Las Figs. 7 y 8 (que no están a la misma escala) sugieren el considerable ahorro en espacio resultante de la vectorización. En la Fig.8 solo se conserva, en formato (x,y,z), la secuencia de puntos de interés.





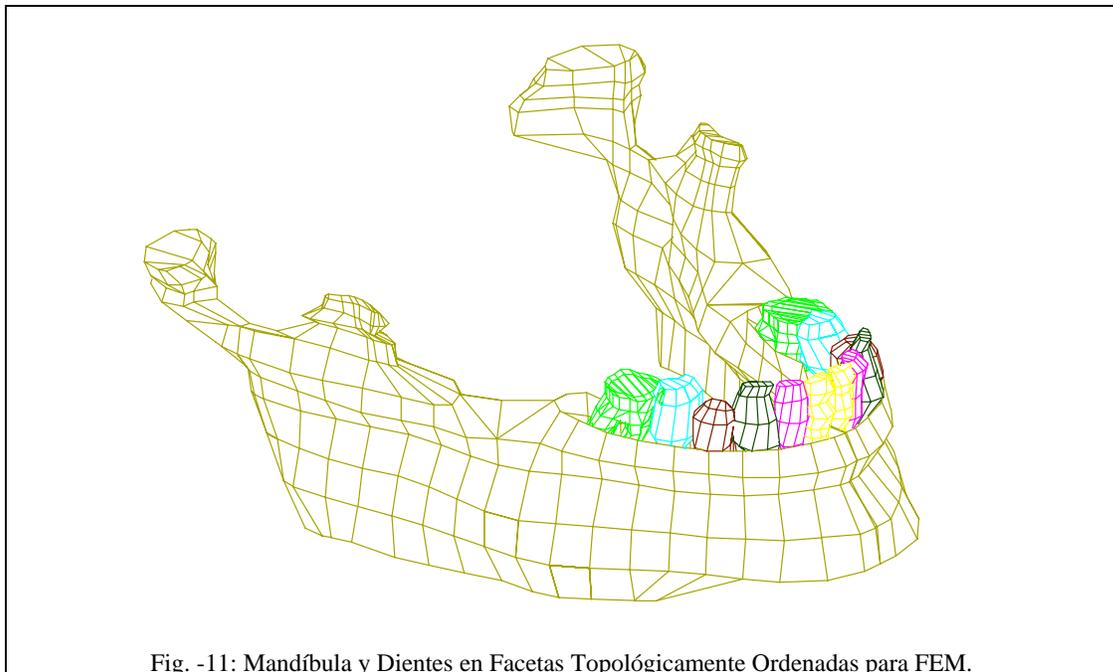
3.3 Muestreo de Hueso

La vectorización correspondiente a hueso en la Fig.8 muestra que las hipótesis de la sección III.2 no se cumplen. El polígono P correspondiente al hueso no tiene kernel, y su centro de gravedad $cg(P)$ cae fuera de P . Adicionalmente, las secciones de corte son no conexas. Por estas razones, el algoritmo de reconstrucción de secciones basado en ordenamiento angular no puede ser aplicado aquí. El diseñador debe rehacer manualmente el polígono P en base a los puntos muestreados. Nótese que la hipótesis de que la digitalización está organizada en planos paralelos sí continua cumpliéndose, aunque el algoritmo de partición no fue aplicado dado que en ningún momento se tuvo acceso a datos (x,y,z) de la digitalización en bruto.

3.4 Inserción de Dientes

Los dientes (removidos en Fig.10) son modelados separadamente de la mandíbula. Para el análisis de Elementos Finitos se requiere tanto la mandíbula sola como con los dientes. En este ultimo caso se efectúan operaciones booleanas con la superficie ajustada. Es importante anotar que dichas operaciones no están soportadas en los modeladores usados (AutoCAD o MicroStation) para superficies faceteadas.

3.5 Ajuste de Facetas y Resultado Final



Las facetas fueron dimensionadas (por requerimiento del software FEM) a tamaños típicos de 6mm de lado. La Fig.10 muestra la disposición topológica del arreglo de facetas. Las polilíneas deben ser re-muestreadas por distancia (ver sección III.4). En cada nivel las facetas quedan fijas por los puntos re-muestreados sobre la polilínea en el nivel anterior. El arreglo de facetas esta prácticamente definido, excepto pos casos especiales en los cuales el siguiente nivel colapsa o crece en tamaño. En dicho caso se genera un re-muestreo por numero de puntos de la sección cambiante, y / o se aceptan elementos triangulares además de los rectangulares básicos. La Fig. 11 muestra el resultado final como se entrega al software FEM. Nótese que el arreglo de facetas es topológicamente ordenado, excepto por las secciones de transición.

4 CONCLUSIONS

Este artículo presenta una serie de herramientas de razonamiento geométrico para ayuda en el ajuste de superficies a digitalizaciones. Adicionalmente presenta la etapa previa al tratamiento de la digitalización, la obtención de datos vectorizados 3D. Dada el crecimiento explosivo de técnicas de muestreo remoto, la producción de datos voxel no parece ya ser problema. Sin embargo, gran número y el hecho de que no contienen en sí mismos información adicional los hace inútiles en su forma primitiva. Por lo tanto se presenta la necesidad de recuperar información de vecindario, superficies, etc. El paso de información propietaria a formato *raster* y / o vector es generalmente difícil por la falta de acceso a herramientas diferentes del software propietario del fabricante del hardware. Este artículo propone las herramientas computacionales como una alternativa a dicha interdependencia. Se presenta un ejemplo (horma de calzado) en el cual el razonamiento geométrico permite la recuperación de la forma original en forma automática. Así mismo, se presenta un ejemplo en el cual el razonamiento geométrico implementado falla (predeciblemente, dado el incumplimiento de las hipótesis) en recuperar las secciones del objeto. En ambos casos el resultado final atestigua la gran ventaja en ahorro de espacio y en información geométrica y topológica de los formatos obtenidos.

RECONOCIMIENTOS

Esta investigación ha sido patrocinada por el contrato Colciencias (Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología) 152-96 y por la Universidad EAFIT. Los autores desean agradecer al profesor Placid Ferreira del Large Scale Flexible Automation Lab. de la Universidad de Illinois en Urbana - Champaign y al Dr. Charles Wu de Ford Motor Company por su soporte en sus internados sobre ajuste de superficies para ingeniería de estampados (*stamping engineering*). Así mismo se agradece la colaboración de los Drs. Samuel Roldán, María Clara Castaño y Andrea Pedroza del Instituto de Ciencias de la Salud CES por su motivación y ayuda en la parte odontológica, y al profesor Uriel Zapata, del Centro Interdisciplinario de Investigación (CII) de la Universidad EAFIT por su colaboración en lo referente a técnicas de Elementos Finitos (FEM) y su generación del proyecto en general.

Referencias Bibliográficas

- [1] ANSI Y14.5.1M-Draft, "*Mathematical Definition of Dimensioning and Tolerancig Principles*", American Society of Mechanical Engineers. New York, 1993.
- [2] Carr, K., "*Modeling and verification methods for the inspection of geometric tolerances using point data*", Ph.D. Dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1995.
- [3] Drebin, R., Carpenter, L., Hanrahan, P., "*Volume Rendering*". Proceedings, ACM SIGGRAPH, 1988, pp. 65-74.
- [4] Edelsbrunner, H., "*The union of Balls and its Dual Space*". Proceedings, 9th Annual Symposium on Computational Geometry, 1993, pp. 218-231.
- [5] Edelsbrunner, H., Mücke, E., "*Three Dimensional Alpha Shapes*". ACM Transactions on Graphics, 1994, Vol. 13, No. 1, pp. 43-72.
- [6] Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. A Practical Guide* Academic Press. Boston, 1990.
- [7] Guo, B., *Surface Reconstruction: from Points to Splines*. Computer Aided Design. Vol. 29, No. 4, 1997, pp. 269-277.

- [8] Khan, M., Vance, J., "A Mesh Reduction Approach to Parametric Surface Polygonization". Proceedings, ASME Design Engineering Technical Conferences. -Advances in Design Automation, 1995, pp. 41-48.
- [9] Mortenson, M., *Geometric Modeling*, John Wiley and Sons. New York, 1985.
- [10] Posada, J., "An Implementation of the AIS Interface on MicroStation", B.Sc. Thesis, Universidad EAFIT Medellín, Colombia, 1997.
- [11] Preparata, F., Shamos, M. I., *Computational Geometry. An Introduction*, Springer Verlag. New York, 1985.
- [12] Ramos, J., "Introducción a la Tomografía Axial Computarizada". Memorias, XIII Congreso Latinoamericano de Informática, 1987, pp. 532-544.
- [13] Ramos, A., Basso, K., Partichelli, P., Scharcanski, J., Longhi, M., "Um Sistema para Visualização Tridimensional de Tomografia Computarizada". Memorias, XIII Congreso Latinoamericano de Informática, 1987, pp. 545.
- [14] Ranyak, P., "Application Interface Specification (AIS), Version 2.1". Consortium for Advanced Manufacturing International (CAM-I). Integrity Systems, USA, 1994.
- [15] Ruiz, O., Marin, R. and Ferreira, P., "A Geometric Reasoning Server with Applications to Geometric Constraint Satisfaction and Reconfigurable Feature Extraction". Proceedings, 3rd Luso-German Workshop on Graphics and Modeling in Science and Technology, Coimbra, Portugal, 1994.
- [16] Ruiz, O., "Geometric Reasoning in Computer Aided Design, Manufacturing and Process Planning", Ph.D. Dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1995.
- [17] Ruiz, O., Posada, J., "Geometric Reasoning for Character Line-Preserving Surface Fitting ". Submitted for publication to the IIE Transactions on Design and Manufacturing.
- [18] Saldarriaga, J. and Isaza Dario, "An Implementation of the AIS Interface on AutoCAD", B.Sc. Thesis, Universidad EAFIT Medellín, Colombia, 1997.
- [19] Vanzandt W. "Scientific Visualization: One Step in lab Analysis Workflow", Advanced Imaging, Feb, 1992, p. 20.